УДК 681.3:004.94

**Об универсумах времени в моделях сложных**

**дискретных систем[[1]](#footnote-1)**

В.П. Кутепов, В.Н. Фальк

В статье обоснован тезис о неадекватности использования линейно-упорядоченных моделей времени при описании процессов в сложных дискретных системах, характеризующихся наличием компонентов с независимым поведением между моментами их взаимодействия, рекурсивно определенной, иерархически организованной, меняющейся (динамической) и не ограниченной по сложности структурой, с неоднозначным поведением. Под *универсумом* *времени* в работе понимается конечное частично-упорядоченное множество моментов времени возможных событий в системе, частичный (строгий) порядок в котором отражает допустимый реальный параллелизм процессов согласно причинно-следственным связям между возможными событиями в системе. Известные формализации (ациклические орграфы, диаграммы Хассе) оперируют с такими множествами и отношениями между ними. Введенные в статье понятия Т-сети и Т-сетевого языка, т.е. множества Т-сетей, используются для конструктивного задания **множеств** универсумов времени при моделировании параллельных процессов в системах. Эти понятия базируются на предложенном нами ранее [8,9] определении сетевого представления схем так называемых направленных отношений (НО) – базового формализма для построения языков декларативного программирования. Синтаксически сеть НО является обобщением понятия двудольного орграфа с дополнительными компонентами, обеспечивающими широкие возможности композиции сетей и задания сетевых языков. Вершины графа двух видов – точки и элементы – в теории НО интерпретируются как элементы носителя, на котором определены НО, и НО, соответственно. В свою очередь, элементы могут быть терминальных и нетерминальных сортов, представляя конкретные базисные НО и реляционные переменные, соответственно. Т-сети в работе интерпретируются как схемы некоторых подмножеств универсумов времени, точки Т-сетей – как конкретные моменты времени этих универсумов, элементы Т-сетей терминального сорта – как отношения порядка между ними, а элементы нетерминальных сортов – как схемные переменные. Основным синтаксическим отличием Т-сетей от сетей НО является требование отсутствия циклов в Т-сетях, что обеспечивается выполнением некоторых предложенных в статье ограничений на компоненты сетей. В статье доказывается корректность по отношению к этим ограничениям операции подстановки некоторой Т-сети в другую Т-сеть вместо ее элемента, согласованного с подставляемой сетью по количествам входов и выходов. Операция подстановки используется как для иерархического построения Т-сетей, так и для многовариантного и рекурсивного задания множеств Т-сетей. Описано применение операции подстановки для задания класса контекстно-свободных Т-сетевых языков с помощью контекстно-свободных Т-сетевых грамматик. Для иллюстрации приведен простой пример грамматики для описания модели времени для процесса параллельного рекурсивного вычисления определенного интеграла. Определены направления дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** *модели поведения дискретных систем*, *динамические системы*, *формализация универсума времени в системах*, *частично-упорядоченные множества*, *средства конструктивного задания множеств универсумов времени для иерархических динамических систем*, *Т-сети*, *контекстно-свободные Т-сетевые языки и грамматики.*

**Keywords:** *models of the behavior of discrete systems, dynamical systems, the formalization of the universe of time in systems, partially ordered sets, means for constructively specifying sets of time universes for hierarchical dynamical systems, T-networks, context-free T-network languages and grammars.*

*Propter hoc ergo post hoc[[2]](#footnote-2)*

1. **Введение**

Понятие времени – одно из важнейших при исследовании поведения различных объектов, систем и процессов. Причинно-следственные связи в системах, приводящие к смене их состояний, предполагают, что следствие всегда наступает **после** появления причины. Кроме того, как правило, для смены состояний в общем случае необходимо **одновременное** наличие нескольких причин.

При анализе поведения дискретных систем множество возможных моментов времени событий – *универсум* *времени* – обычно формально описывается как линейно-упорядоченное множество с теми или иными дополнительными свойствами: характеристикой мощности (конечное, счетное или континуум); ограничено (сверху и-или снизу) или нет; наличием наибольшего и-или наименьшего элемента; видом отношения порядка (дискретное, плотное или непрерывное); степенью разрешимости (рекурсивное, рекурсивно-перечислимое или рекурсивно не перечислимое); способом задания (конструктивно заданное или имеющее вероятностную или нечеткую природу) и т.д.

Если мы имеем дело с поведением систем с иерархически организованной или изменяемой и потенциально неограниченной по сложности и по глубине структурой, то возникает вопрос о внутреннем поведении ее отдельных компонентов, когда на отдельных интервалах универсума времени системы поведение ее компонента является скрытым от некоторых других компонентов на том же и на других уровнях иерархии в системе, не связанных с ним причинно-следственными связями. В этом случае теряет смысл сравнение времен событий в таких компонентах, а вместе с этим и общая трассировка поведения системы. Одной из наиболее близких нам по существу подхода к концепции времени при описании процессов в сложных дискретных системах можно считать работу [1].  Среди других работ отметим статьи [2,3], которые посвящены построению оптимальных алгоритмов упорядочения событий в системе на основании отслеживания и упорядочивания моментов взаимодействия компонентов системы и установлении причинно-следственных связей между событиями. В отличие от более простых и ограниченных алгоритмов, основанных на так называемых скалярных [4] и векторных [5] представлениях временных отсчетов, в [3] используются иерархические часы, которые позволяют компоненту системы явно определять не только следование событий, но также устанавливать причинно-следственные связи между ними. Работа [6] дает представление о временных процессных алгебрах, которые создавались с целью описания последовательно-параллельных процессов с учетом различных способов задания в них времени. Применение традиционных средств описания частично-упорядоченных множеств определяет и наш интерес к новым работам по их классификации, композиции и различным отношениям на универсуме ациклических орграфов [7].

Естественным решением, на наш взгляд, является **концепция универсума времени как частично-упорядоченного множества.**

Настоящая публикация отражает наш подход к проблеме описания универсумов времени, в основе которого лежит предположение, что для независимых компонентов систем общими моментами времени являются только моменты их взаимодействия. В статье предлагаются средства конструктивного задания множеств универсумов времени для моделирования реальных параллельных процессов в сложных дискретных системах.

1. **Известные базовые понятия**

Напомним необходимые для изложения понятия и введем некоторые используемые в статье обозначения.

Пусть  – транзитивное антирефлексивное *отношение строгого порядка* на множестве  (далее вместо  будем писать ). Транзитивность: , антирефлексивность: . Асимметричность:  является следствием транзитивности и антирефлексивности. Иными словами,  – частично (строго) упорядоченное множество. Истинность   означает сравнимость . Без существенных потерь для нашего исследования предположим, что в  нет «лишних» элементов, не сравнимых ни с одним другим элементом : . Элемент  называется *минимальным* в , если , элемент  называется *максимальным* в , если . Если в  имеется единственный минимальный элемент (обозначим его ), он называется *наименьшим* в , если в  имеется единственный максимальный элемент (обозначим его ) он называется *наибольшим* в . Существование наименьшего (наибольшего) элемента в  может постулироваться аксиомой  ( , соответственно).

Если  – конечное множество ()[[3]](#footnote-3), то и количество различных (с точностью до изоморфизма) частично (строго) упорядоченных множеств любой мощности – конечно, а, следовательно, нет проблемы их конструктивного задания. В статье предлагаются средства конструктивного задания множеств таких множеств, в общем случае бесконечных, а, следовательно, и не ограниченных по сложности. Одной из возможных форм задания конечных частично-упорядоченных множеств является их описание на базе ациклических орграфов на множестве вершин , в общем случае, с несколькими компонентами связности. С учетом принятого соглашения предполагается, что в графе  нет изолированных вершин. Так как множество  дуг в произвольном орграфе  без петель есть подмножество множества всевозможных двухэлементных упорядоченных подмножеств , то оно представляет собой некоторое бинарное антирефлексивное отношение  на . В наших обозначениях[[4]](#footnote-4) это записывается так: , а множество всевозможных орграфов без петель и изолированных вершин на множестве вершин  есть . Если орграф является ациклическим, т.е. для любой его дуги  не существует пути из  в , то транзитивное замыкание любого такого отношения  является, очевидно, отношением частичного (строгого) порядка на [[5]](#footnote-5).

1. **Т-сети. Основные определения**

Целью нашей работы является создание практически удобных средств конструктивного задания множеств универсумов времени для последующего адекватного описания поведения иерархически и рекурсивно организованных систем.

Для достижения этой цели, во-первых, как было указано, мы основываемся на традиционном представлении конечных частично-упорядоченных множеств ациклическими орграфами (как следствие, без петель). Во-вторых, так как поведение систем, как правило, не носит детерминированный характер и предполагает возможность разных реализаций в них процессов, то необходимым объектом описания становятся не конкретные универсумы времени, а **множества** возможных универсумов времени. Особенно актуальным это является для динамических систем, структура которых меняться во времени, а сложность может неограниченно возрастать. В связи с этим, вместо формализма теории графов мы предлагаем использовать более семантически сложные понятия ***Т-сети*** и ***Т-сетевого языка*** (множества Т-сетей), во многом подобные тем, которые использовались нами в теории направленных отношений [8,9].

В основе понятия Т-сети лежит понятие двудольного графа с вершинами двух видов: *точками* и *элементами*. Арностью Т-сети и арностью элемента Т-сети называется упорядоченная пара  натуральных чисел , означающая, соответственно, количества входов и выходов Т-сети или ее элемента.

* Определение. *Базисом*  называется конечное множество *сортов элементов* Т-сети. Функции  задают *арность*  элементов Т-сети каждого сорта  (сорт элемента и всей Т-сети может указываться в виде их правого верхнего индекса). Базис в общем случае разбивается на два подмножества:  – *терминальный* базис и  – *нетерминальный* базис, . Для простоты полагаем, что имеется один терминальный сорт  арности .

На рис. 1 показано графическое представление терминальных элементов указанных сортов, а также представление элемента нетерминального сорта .

Рис.1. Графическое представление элементов Т-сетей.

б) элементы нетерминальных сортов 

а) элементы терминального сорта 







Определение. Т*-сетью*  ( – арность Т-сети) в базисе  называется набор , где  – конечное множество *точек* Т*-сети*,  – кортеж  *входных точек* Т*-сети*,  – кортеж  *выходных точек* Т*-сети*,  – комплект[[6]](#footnote-6) *элементов*  Т-сети,  – сорт элемента,  – кортеж *входных точек элемента*,  – кортеж *выходных точек элемента*,  – множество ребер  неориентированного графа без петель – dif-*графа* Т*-сети*.

Предполагается, что в множестве точек нет «лишних» точек, не являющихся ни входами, ни выходами Т-сети, ни входами, ни выходами ни одного элемента Т-сети и не инцидентных ни одному ребру ее dif-графа. Для иллюстраций будем использовать далее графическое представление Т-сетей, которое определяется аналогично графическому представлению сетей направленных отношений [6,7], причем отличие заключается только в представлении элементов терминальных сортов (рис. 1). Это представление предполагает, что Т-сети рассматриваются с точностью до изоморфизма относительно множества точек Т-сети (то есть в графическом представлении не требуется указывать имена точек и элементов сети).

Кортежи входных и выходных точек, элементы нетерминальных сортов вводятся как компоненты Т-сети для эффективного задания иерархически организованных универсумов времени и рекурсивно определенных множеств универсумов времени. С их помощью мы далее определим[[7]](#footnote-7) операцию *подстановки*. В качестве основы определения воспользуемся введенным в [7] определением операции подстановки для сетей направленных отношений. Заметим только, что для того, чтобы не указывать направления связей между точками и элементами Т-сети нетерминальных сортов, при графическом представлении эти элементы размещаются так, что слева указываются их связи с входными точками, а справа – с выходными, в порядке перечисления сверху-вниз. То же относится и к представлению входных и выходных точек Т-сети: первые связываются с левой стороной ограничивающего представление сети прямоугольника, а вторые – с правой, так же в порядке перечисления сверху-вниз.

Как было указано выше, Т-сеть можно рассматривать как специальным образом нагруженный двудольный орграф с вершинами двух видов (точки и элементы): элементы взвешены сортами из базиса, дуги, входящие в элементы и выходящие из элементов, линейно упорядочены (в графическом представлении – сверху-вниз), а их количества определяются сортами элементов. Дополнительно задаются компоненты , и . Это позволяет не определять известные понятия *пути*, *цикла* и т.д. относительно точек Т-сети. Так как нас интересуют только Т-сети без циклов, то полагаем необходимым выполнение дополнительного требования к их компонентам. Ограничение 1: множество точек Т-сети *ранжируемо* – существует функция ранжирования , такая, что для любого элемента Т-сети, его любой выходной точки  и его любой входной точки  выполняется условие .

Утверждение. Для любой функции ранжирования  и любых  функция , такая, что

,

также является функцией ранжирования (доказательство очевидно).

Если ранжирование возможно, то в Т-сети нет циклов, и существует «минимальная» функция ранжирования , такая, что для любой другой функции ранжирования  выполняется условие :

* , если и только если  не является выходной точкой некоторого элемента,
* в противном случае, , где  – множество всех входных точек всех элементов, для которых точка  является выходной.

Заметим, что существует простой итерационный алгоритм определения ранжируемости Т-сети, который при положительном ответе задает для всех точек этой сети значения функции .

Очевидно, что Т-сети арности  (отсутствуют такие компоненты, как входы и выходы сети), с пустым dif-графом, а все элементы – терминального сорта представляют собой не что иное, как однозначно определяющие универсумы времени ациклические орграфы, дуги которых суть элементы Т-сети терминального сорта. Неиспользуемые компоненты (кортежи входов и выходов Т-сети, dif-граф, элементы нетерминальных сортов) введены нами для рассматриваемого далее задания множеств универсумов времени.

На множестве возможных универсумов времени естественным образом вводится отношение  частичного порядка (не строгого). Пусть  и  – два универсума времени. Если  и , будем говорить, что универсум  является *расширением* универсума : . Более общей формулировкой такого рода отношения *вложения* универсумов времени (с учетом того, что мы рассматриваем универсумы времени с точностью до изоморфизма множеств моментов времени) является истинность утверждения

.

Иногда на практике, вместо минимально необходимого универсума времени , удобно использовать некоторый расширенный универсум , например, очевидно, что любой универсум времени вложим в некоторый линейно-упорядоченный универсум времени.

Определим результат  *подстановки* Т-сети  в Т-сеть  вместо ее элемента  нетерминального сорта той же арности , что и подставляемая Т-сеть. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что :



Рис. 2 иллюстрирует определение операции подстановки с использованием графического представления.

Если (согласно этому определению) в dif-графе результата образуются петли, то результат подстановки не определен. Как видно из определения, в процессе подстановки может происходить отождествление некоторых точек, являющихся входными для нетерминального элемента, вместо которого выполняется подстановка, и входными подставляемой Т-сети, и являющихся выходными для нетерминального элемента, вместо которого выполняется подстановка, и выходными подставляемой Т-сети. Для того, чтобы в результате подстановки ациклической Т-сети в ациклическую Т-сеть полученная сеть также была ациклической, то есть ранжируемой, необходимо ввести дополнительные ограничения на компоненты  и  в определении Т-сети:

Рис. 2. Операция подстановки T-сети  в T-сеть  вместо ее элемента .  – результат подстановки.

# 

# R

# 

# 

# 

# 

# 

# 

# 

# 

# 

# 

# 

Ограничение 2. Две любые различные точки, входящие одновременно или в кортеж , или в кортеж , не связаны в Т-сети некоторым путем. То же ограничение действует для входных и выходных точек нетерминальных элементов Т-сети (для терминальных элементов арности  такой проблемы нет).

Иными словами, в интерпретации Т-сети все входные точки попарно не сравнимы и, соответственно, все выходные точки попарно не сравнимы. Заметим, что из требования ранжируемости точек сети следует и выполнение утверждения: для любого элемента Т-сети для любой точки, входящей в кортеж выходных точек Т-сети, нет пути ни в одну из входных точек этого элемента.

Ограничение 3. Одна и та же точка не может быть одновременно и входной, и выходной точкой Т-сети (для входов и, соответственно, выходов элементов это следует из ранжируемости точек сети).

Докажем *корректность* операции подстановки, то есть, что при выполнении ограничений 1-3 результат подстановки также удовлетворяет требованиям этих ограничений.

Доказательство. Исходные Т-сети, и , и , ранжированы функциями  и , соответственно. Пусть максимальный ранг точек в Т-сети  равен , максимальный ранг входных точек элемента  в Т-сети , вместо которого подставляется , равен . Из ранжируемости Т-сети  следует, что минимальный ранг выходных точек этого элемента строго больше максимального ранга его входных точек. Сперва не будем учитывать, что при подстановке может происходить отождествление точек, как в объединении входных точек элемента Т-сети  и входных точек Т-сети , так и в объединении выходных точек элемента Т-сети  и выходных точек Т-сети . В этом случае, согласно сформулированному ранее утверждению, искомое ранжирование  можно определить так: 1) для всех точек  Т-сети  [[8]](#footnote-8), для всех точек  Т-сети , таких, что , , 2) при отождествлении -й входной точки  элемента  c -й входной точкой  Т-сети  (в результате ее обозначим как ) положим . В случаях отождествления одной или более входных точек элемента  с одной или более входными точками Т-сети  так же, как и при отождествления одной или более выходных точек элемента  с одной или более выходными точками Т-сети , полагаем, что ранг полученной точки  определен как минимальный из рангов отождествленных точек. В результате для полученной в результате подстановки Т-сети  сохранится ранжируемость и выполнение введенных ограничений.

1. **Рекурсивное задание множеств Т-сетей**

По аналогии с определениями сетевых языков схем направленных отношений [7] Т*-сетевым* языком арности  называется множество Т-сетей одинаковой арности  с элементами исключительно терминального сорта (в *терминальном базисе*). Потребность в задании именно множеств универсумов времени, а, следовательно, и множеств задающих их Т-сетей, естественно возникает при описании сложных систем, поведение которых, как правило, является недерминированным, а конфигурация системы может изменяться в процессе ее функционирования.

Для задания Т-сетевых языков могут использоваться различные *сетевые грамматики*, в частности, наиболее практически важными являются *контекстно-свободные Т-сетевые грамматики* (*кстс-грамматики*). Кстс-грамматикой называется (по аналогии с традиционной контекстно-свободной формальной грамматикой) набор , где  – множество нетерминальных сортов элементов (нетерминальный базис),  – *аксиома* грамматики,  – множество *правил* грамматики вида , где , а  – Т-сеть той же арности, что и сорт , в базисе .

Т-сетевой язык, заданный кстс-грамматикой , определяется как подмножество всех Т-сетей арности , не содержащих элементов нетерминальных сортов из числа *выводимых* из аксиомы  применением правил из :

* + все Т-сети – правые части правил вывода для аксиомы – выводимы в грамматике ,
  + если Т-сеть  выводима,  – ее элемент сорта  и  – правило из , то и Т-сеть, полученная подстановкой в Т-сеть  Т-сети  вместо элемента , также выводима в грамматике .

Если аксиома грамматики имеет арность , то Т-сетевой язык *интерпретируется* как множество универсумов времени.

* 1. **Интерпретация Т-сетей и Т-сетевых языков**

Точки Т-сети интерпретируются как *моменты времени* – элементы универсумов времени, то есть конечных частично строго упорядоченных множеств. Как было указано выше, сами универсумы времени представлены в интерпретации Т-сетями арности , все элементы которых – терминальных сортов, а dif-граф – пустой, то есть, фактически, ациклическими орграфами. Отношение строгого порядка для представленных точками сети моментов времени эквивалентно наличию в такой Т-сети пути из одной точки в другую.

Множество такого рода Т-сетей интерпретируется как множество универсумов времени, а их эквивалентность (вложение) – как изоморфизм (гомоморфизм) их интерпретаций как множеств частично (строго) упорядоченных множеств.

Если рассматривать Т-сети с произвольными dif-графами при сохранении других указанных выше ограничений, то можно определить их эквивалентность (точнее, одноэлементных множеств таких Т-сетей) некоторым конечным подмножествам Т-сетей с пустыми dif-графами. Как было сказано ранее, ребро  dif-графа в интерпретации понимается как сравнимость сопоставленных этим точкам моментов времени  и , то есть, истинно либо , либо . Следовательно, если в Т-сети есть путь из точки  в точку  или, наоборот, из точки  в точку  (одновременно быть не может), то ребро  можно удалить. В противном случае исходная Т-сеть эквивалентна подмножеству из двух таких же Т-сетей без этого ребра в dif-графе, но каждая с одним дополнительным элементом сорта :  и , соответственно.

Для Т-сетевых языков  и  проблема *включения* в интерпретации сводится к доказательству того, что для любой Т-сети из  существует Т-сеть в , в которую она вложима. Эквивалентность сетевых языков понимается как их взаимное включение.

Элементы нетерминальных сортов Т-сетей являются, по существу, свободными вхождениями в Т-сети *сетевых переменных*, а содержащие их Т-сети являются *схемами* множеств универсумов времени. Поэтому для Т-сетей с нетерминальными элементами их включение и эквивалентность понимаются, соответственно, как *сильное* включение и *сильная* эквивалентность (то есть соответствующие отношения при любой интерпретации нетерминальных элементов) и более детально в этой работе не рассматривается.

* 1. **Пример**

Ограничения на объем журнальной публикации не позволяют рассмотреть сложные, содержательно интересные примеры задания множеств универсумов времени для целей моделирования недетерминированного поведения иерархически организованных и рекурсивно определенных динамических систем. Исключительно для демонстрации средств графического представления Т-сетей и грамматик для задания Т-сетевых языков приведем достаточно простой пример (используются пустой dif-граф, нетерминальные сорта элементов только арности ). Он иллюстрирует задание множества универсумов времени для различных этапов рекурсивного (дихотомического) вычисления значения определенного интеграла заданной унарной достаточно «гладкой» функции  на заданном интервале  с заданной точностью  методом трапеций:

 

Рис. 3 поясняет приведенное функциональное описание вычислений.

Рис. 3. Пояснение к примеру.





















Т-сети – правые части правил сетевой грамматики отражают функциональные, а, следовательно, и причинно-следственные связи моментов времени в реализующей вычисления системе. Стандартные модели вычислений значений элементарных функций в форме Т-сетей показаны на рис. 4. Условные определения и вызов функций, представленных нетерминальными сортами, реализованы без опережающих вычислений. Входные точки – моменты завершений вычислений отдельных аргументов, выходная точка – завершение вычисления значения функции, внутренняя точка – начало вычисления значения функции.

На рис. 5 приведены правила кстс-грамматики ( – аксиома, нетерминальный базис – ). Для иллюстрации связи правил грамматики с приведенным функциональным описанием функции  (аксиома грамматики) на рис. 5 в правых частях правил у некоторых точек указаны переменные, моменты времени завершения вычислений значений которых они представляют, а в представлениях некоторых элементов терминальных сортов даны имена элементарных функций, вычисление которых они моделируют. Остальные элементы терминальных сортов отражают действия по упаковке и распаковке наборов данных. Отметим, что мы не показали правило (или правила) грамматики для нетерминального сорта : если процесс вычисления значения этой функции имеет сложный (параллельный, рекурсивный) характер, возможно, потребуются дополнительные нетерминальные сорта элементов и соответствующие правила грамматики. В противном случае, функция  может моделироваться так же, как и элементарные функции.

Рис.4. Т-модель -арного функционального преобразователя.





1. **Заключение**

Хорошо известны многие средства задания не только контекстно-свободных, но и более широких классов формальных языков. Их адаптация к заданию Т-сетевых языков и разработка новых специализированных видов Т-сетевых грамматик позволят адекватно строить модели времени для описания поведения всё более сложно организованных дискретных систем.

За рамками этой публикации остались и такие вопросы, как алгебраический подход к описанию различных классов Т-сетей, исчислений эквивалентности и вложений Т-сетей и Т-сетевых языков, а также временн*о*е моделирование различных способов взаимодействия процессов в системах, в том числе и механизма прерывания. Мы продолжаем работу в этих направлениях.









































































Рис.5. Пример. Правила кстс-грамматики.

































**Литература**

1. Ковалев С.П. Архитектура времени в распределенных информационных системах // СО АН. «Вычислительные технологии», том 7, № 6, 2002. С. 38-53.
2. Winkowski J. An algebraic framework for concurrent systems. Report №1023, Institute of the Polish academy of science, 2012, P.140.
3. Ravi Prakash and Mukesh Singhal.  Dependency sequences and hierarchical clocks: efficient alternativesto vector clocks for mobile computing systems //ACM| Baltzer journal on wireless network. 3,1997, P. 349-360.
4. L. Lamport. Time, clock and the ordering of events in distributed systems. Communications of ASM 21 (7), 1978, July, P. 358-365.
5. J. Fidge. Timestamps in  message- passing systems that preserve the partial ordering. Proceedings of the 11-th Australian computer  science conference, 1988, P.56-66.
6. С. A. Middelburg. Revisiting timing I process algebra. The journal of logic and algebraic programming. 54, 2003, P. 109-127.
7. Х. Ш. Аль Джабри, В. И. Родионов. Граф ациклических орграфов //  *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **25**:4(2015), 441–452.
8. Кутепов В.П., Фальк В.Н. Направленные отношения: теория и приложения // Изв. РАН. Техническая кибернетика, 1994. № 4,5.
9. Фальк В.Н. Теория направленных отношений и ее приложения // Автореф. дисс. … докт. техн. наук. -М: МЭИ. -2001.-40 с.
10. Фальк В.Н. Об одном подходе к эффективной нумерации рекурсивных множеств конструктивных объектов // Вестник МЭИ, №4, 2013.

**Кутепов Виталий Павлович**

Доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики НИУ «МЭИ»

**Фальк Вадим Николаевич**

Доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики НИУ «МЭИ»

**Vitaly P. Kutepov**

Dr.Sci. (Techn.), Professor of Applied Mathematics Dept., MPEI.

**Vadim N. Falk**

Dr.Sci. (Techn.), Professor of Applied Mathematics Dept., MPEI.

1. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-01-00548. [↑](#footnote-ref-1)
2. «Вследствие этого, следовательно, после этого» [↑](#footnote-ref-2)
3.  [↑](#footnote-ref-3)
4. см., например, [10] . Для различных конечных наборов элементов некоторого множества  используются различные скобки:  – для кортежей,  – для комплектов (мультимножеств конечной мощности),  – для подмножеств конечной мощности,  – для упорядоченных подмножеств конечной мощности. Соответственно, множества всех конечных наборов элементов  этих типов обозначаются как , а их подмножества наборов из конкретного числа  элементов как . [↑](#footnote-ref-4)
5. В математической среде тоже больше внимания уделяется проблемам классификации, композиции и различным отношениям на универсуме ациклических орграфов, например, [5]. [↑](#footnote-ref-5)
6. В отличие от теории направленных отношений [8,9], в Т-сетях возможно наличие нескольких одинаковых элементов (комплект – мультимножество конечной мощности). [↑](#footnote-ref-6)
7. Алгебраический подход к композиции Т-сетей и Т-сетевых языков (множеств Т-сетей) в данной статье не рассматривается, также как и логические исчисления их содержательной эквивалентности и формализации отношения вложения. [↑](#footnote-ref-7)
8.  – «равно по определению». [↑](#footnote-ref-8)